

以共面自然頻率估算橢圓板彈性模數之研究

程安邦¹ 歐陽鋒²

1、國立宜蘭技術學院生物機電工程系副教授，通訊作者

2、國立宜蘭技術學院生物機電工程系副教授

摘要

本文提出適用於估算二維橢圓板彈性模數的預測公式。方法是先由有限元素模型中找出二個適用的共面振動模組，再以簡單的單一形狀函數描述振形。接著積分總位能與總動能，並利用 Rayleigh's quotient 推導出自然頻率的概略表示式。將此二個頻率公式適當地重新組合，最後得到一個僅包含質量與二個頻率乘積的簡單彈性模數預測公式。經以不同波以松比的有限元素模型測試，結果顯示本研究所提出的預測公式誤差很小，因此確能適用於不同軸長比與波以松比的橢圓板。

關鍵詞：橢圓、振動模組、Rayleigh's quotient、彈性模數、有限元素法

Estimation of Modulus of Elasticity of Elliptic Plates Using In-Plane Natural Frequencies

An-Pan Cherng¹ Feng Ouyang²

1. Associate Professor, Dept. of Biomechatronic Engineering, Corresponding author
2. Associate Professor, Dept. of Biomechatronic Engineering

Abstract

This paper proposes a novel formula which can predict the Modulus of Elasticity (MOE) of Elliptic Plates. To start with, two of the in-plane flexural modes were carefully selected from Finite Element Model. Each of their mode shapes was approximated by a simple shape function. The potential and kinetic energies were integrated over the whole area, and the equations of their natural frequencies were derived by Rayleigh's quotient. Finally, a formula for estimating MOE was constructed by properly rearranging the two frequency equations. The newly developed formula was a product of mass and two frequencies. Different Poisson's ratios were then used to evaluate the formula. Satisfactory results verify that the estimation produces relatively small errors for various axis ratios as well as Poisson's ratios.

Keywords: elliptic plate 、 vibration mode 、 Rayleigh's quotient 、 Modulus of Elasticity 、 Finite Element Method

一、前言

截面外形為圓或橢圓的結構常見於工程應用中，因此無論其動態或靜態特性皆具有研究的價值。圓或橢圓在其平面的彈性變形運動可以視為板(plate)結構的共面(in-plane)振動，其模組(mode)可大致區分為彎曲模組(flexural mode)與扭轉模組(torsional mode)。由於加速規或麥克風等感測器對於彎曲模組的振動訊號極敏銳，因此本文僅探討彎曲模組的情形。

首先討論圓板。圓是屬於軸對稱的幾何圖形，數學表示式也很精簡。圓板的模組之間存在一些相關性，包括振形(mode shape)與自然頻率(natural frequency，以下簡稱頻率)，因此長久以來受到許多學者的注意。舉例來說，在自由邊界條件下，中空而厚度遠小於半徑的圓環(ring)，第 i 個彎曲模組 S_i 的振形很像繞著圓周的正弦函數 $\sin(i\theta)$ 。頻率的關係方面，在波以松比(Poisson's ratio)為零的條件下頻率比值為 $f_2:f_3:f_4=2.68:7.59:14.55$ (第一個模組 S_1 為剛體模組，故頻率為零)[1,2]。當二維的圓板擴展至三維的球時，振形仍舊類似三維的正弦函數，而波以松比為 0.3 的條件下頻率比值關係則為 $f_2: f_3: f_4=2.65:3.94:5.05$ [3]。事實上，已知波以松比對頻率比值的影響有限，因此上述的頻率比值變化不大。換句話說，若已知某一模組的頻率，其他模組的頻率即可依公式換算出來。隨著科技的進步，前述的理論值也很容易由有限元素(Finite Element，FE)的電腦模型得到證實。

不僅如此，對線性單一材質的結構體而言，各模組的頻率平方與彈性模數(Modulus Of Elasticity，MOE)成正比，與密度成反比也是已知的事實。因此，頻率與材料常數(如 MOE 與波以松比)、物理性質(如質量與密度)、以及幾何尺寸的關係就很明確。若要進一步對其中的一個未知數求解也就不是很困難的事，前述的文獻都有詳細的公式可以參考。舉例來說，在實驗模態分析(Experimental Modal Analysis, EMA)裡，估算被測體之 MOE 是很常見的逆向問題。做法可以如下：

先以物理方法量測密度、幾何尺寸等，再由振動試驗找出某些模組的自然頻率，接著利用相同密度與幾何尺寸但任選的彈性模數建立一個有限元素電腦模型。該模型所得到的同一模組自然頻率與模態試驗的頻率平方比即為 MOE 的比值，因此被測體的 MOE 便可以很快地計算出來。EMA 的方法可以適用於複雜的結構體，但純粹數理的方法卻只能針對某些特定形狀的幾何推導出理論的解或數學式，這說明了電腦模型雖然僅提供數值解或逼近解，但卻是蠻有效率且結果是一樣可信賴的。

橢圓板的情形就是一例，但目前的研究文獻很少，因此激發了本研究的動機。圓與橢圓都屬於對稱的幾何圖形，圓為橢圓的特例，橢圓為廣義的圓。橢圓與圓的振形大多相似，但也有相異的地方，例如有些模組只出現在橢圓中。圓的幾何尺寸只有一個，半徑或直徑；但橢圓有二個幾何尺寸：長軸與短軸。由於自由度增加一個，模組之間的頻率比值不再是常數，而是與二個軸的長度都有關。若推展至三維的橢圓體就更複雜，因為頻率與三個主軸長度都有關[4]，因此計算 MOE 的方法就必須重新評估。如前所述，若採用純粹數學模式推導理論解，可能極費時且答案也複雜，這是因為已知即使如直角四邊形等簡單的幾何，也只有在某些特定條件下才有封閉解(closed-form solution)，其他情形下仍需借助某些特殊函數的無限項次線性組合以及數值解[5]。三維的球體以及薄殼球也有類似的情形[3,6,7]。因此在如估算 MOE 等實用的考量下，確有必要尋求更有效率但仍能保持相當準確度的替代方法。採用 FE 的電腦模型是一個可能的方法，不過缺點是必需針對每一個模型都重新建模與求解，不僅自動化計算有困難，效率上也會打折扣。在兼顧速度與精度的考量下，本文提出了利用兩個不同模組自然頻率的某種組合以估算橢圓板 MOE 的簡便方法。當然，此法亦適用於圓板，因此本研究可說是擴大解決了廣義圓板的彈性模數預測方法。

首先以有限元素法得到的振形外觀配合已知的邊界條件為基礎，再利用一些簡單

的形狀函數組合得到概略的振形數理模型。為了可以利用這個結果推導出一個簡單的彈性模數預測公式，必須再找出振形中可以代表主要位移運動的單項函數以簡化振形。接著利用 Rayleigh-Ritz 法推導相對應的動能與位能，再以 Rayleigh's quotient 將位能與動能的比值取平方根後計算自然頻率，並與 FE 預測的頻率結果對照。若二者很接近，就可以證實原先假設的振形數理模型與頻率的估算公式為有效的。最後就是將不同模組的頻率公式組合成一個更簡單的 MOE 預測公式，消除不必要的參數，並將得到包含質量以及二個相關頻率乘積的彈性模數公式，應用時僅需依 EMA 的步驟將這些量測到的數據代入即可。此初步的公式與 FE 的結果比較後乘上一個校正係數就是最後的橢圓板 MOE 估算公式。本研究完成的公式集合了數理理論與電腦高速運算的優點，而經過一些模擬數據的比對之後，證實可以達到快與準的目的。

二、理論推導

本節將依序說明如何觀察與選擇適當的模組，以及如何簡化假設條件與推導彈性模數預測公式。

2.1 橢圓板的共面振形

如前節所述，有限元素的電腦模型所提供的答案有足夠的精確度，因此可以視為理論解以外的一個參考解。本研究的第一步就是先了解橢圓板共面模組的振形，我們採用 ANSYS 模擬的結果來說明[8]。圖一即為橢圓的四個基本彎曲模組振形，此時的軸長比(長軸/短軸，符號為 r)等於 1.4，虛線與實線分別代表原來(未變形)與變形後(即振形)的外廓。為了說明有限元素模型內各點的位移方向與大小，圖一採用向量圖的表示方法，細箭頭為振形的移動方向，箭頭長度代表移動量的大小；粗箭頭則代表最大變形的的位置與移動方向。模組一的主要位移方向在

長軸上，短軸上的位移量相對很小。模組二則在約長短軸之間有最大的位移，共有兩對，一對向外伸展，另一對則向內縮。事實上模組一與模組二屬於圓的同一個重複模組(repeated mode)，其頻率原先是相同的，隨著長短軸的差距增加而分裂為不同頻率的二個模組。模組三的主要位移在短軸上，長軸附近顯然為無位移的節點(node)。模組四則共有二組方向相反的位移，每一組則包含三個半正弦。模態實驗的結果顯示上列的彎曲模組也出現在橢圓球體的橢圓截面上[9]。如果將長短軸差距縮小，也就是將橢圓換成圓，則顯然模組一與二即為圓的 S_2 模組，模組四為 S_3 模組，模組三則為 S_0 模組(此模組很特別，稱為伸縮模組(extensional mode)，可參考[1,2])。

下一步就是如何從以上幾個振形選出適當的模組做進一步分析與頻率的推導。我們選擇了模組一與模組三，理由如下：(1) 模組一與模組三都只有一個主要的位移對，且分別在長短軸上，比較容易分析；(2)就模態實驗的角度來看，長短軸的端點比較容易定位與放置加速規等感測器，也有利於分辨這兩個模組[9]。

接著我們要了解這兩個模組隨著長短軸差距變化的演進模式。圖二即為軸長比 r 為 1.0、1.2、1.4、以及 1.8 的結果，二者都有明顯的變化，可見得振形並非一成不變。當 $r=1.0$ 時，模組一即為圓的 S_2 模組，在圓周上共有 4 個節點；模組三為圓的 S_0 模組，沒有節點。隨著軸長比增加，模組一振形的主要位移集中在長軸上，模組三則集中於短軸上，二者都逐漸接近 S_1 模組，這個 S_1 模組分別對稱於長短軸，而圓是無此模組的(因為此模組在圓為剛體模組)。兩個模組由相異的振形趨向相似的振形，恰巧可以幫助簡化爾後的理論推導。

2.2 彈性模數公式推導

本文之逆向問題可以描述如下：

已知：某一橢圓板之質量 M (指單位厚度之質量)、密度 \bar{n} 、長短軸之長度 a 與 b 、厚度 t 、二個共面彎曲模組(即前節之模組一與模組三)之頻率 f_1 、與 f_2 。

求出：彈性模數 $E=E(M,A,\bar{n},a,b,t,f_1,f_2)$ 的估算公式。

本文同時假設橢圓板滿足下列條件

1. 單一材料，性質為線性(linear)、彈性(elastic)、均質性(homogeneous)、以及等向性(isotropic)。
2. 由於波以松比對頻率的影響有限，故於推導過程中假設為零。待推導完成後再以含不同波以松比之有限元素模型驗證彈性模數之估算公式是否仍適用。
3. 採用極座標。令橢圓之圓心位於原點，長軸與短軸分別與 x 及 y 軸重合，如圖三所示。橢圓圓周上任一點之座標 (r_p, θ) 與笛卡爾座標 (x, y) 之間滿足 $x = r_p \cos(\theta)$ 與 $y = r_p \sin(\theta)$ 之關係。同時 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ，其中
$$r_p^2 = \frac{a^2 b^2}{b^2 \cos^2(\theta) + a^2 \sin^2(\theta)}$$
4. 由前節的討論可知振形的主要位移函數以徑向(radial direction)為主，因此動能亦僅計算徑向之總能量。此徑向位移符號定為 u ，切線位移則忽略。
5. 應變能之計算亦以徑向運動所產生的正交應變為主，切線運動之正交應變與其他剪應變之位能不計。
6. 軸長比 $r(=a/b)$ 介於 1 至 2 之間。
7. 邊界條件為完全自由。

由於採用 Rayleigh's quotient 估算頻率，因此必須先決定振形函數，這可以由本節的簡化條件與觀察前節的二組振形來討論。在自由的邊界條件下，我們觀察到

1. 原點無位移。
2. 圓周上所有的點應變能為零。

3. 模組一在長軸上有最大位移，但短軸位移接近零。模組三則相反。

基於以上條件，我們可以令模組一的振形函數為

$$u_1 = \sin\left(\frac{\mathbf{P}}{2r_p} r\right) |\cos(\mathbf{q})| \quad (1)$$

模組三的振形函數為

$$u_2 = \sin\left(\frac{\mathbf{P}}{2r_p} r\right) |\sin(\mathbf{q})| \quad (2)$$

前二式中的絕對值表示振形分別對稱於 y 軸與 x 軸。若僅積分 1/2 或 1/4 個橢圓則可以忽略該絕對值。

因徑向運動 u_1 產生的徑向正交應變為

$$\mathbf{e}_{r1} = \frac{du_1}{dr} = \frac{\mathbf{P}}{2r_p} \cos\left(\frac{\mathbf{P}}{2r_p} r\right) |\cos(\mathbf{q})|, \quad (3)$$

而切線方向正交應變為

$$\mathbf{e}_{q1} = \frac{u_1}{r} = \frac{1}{r} \sin\left(\frac{\mathbf{P}}{2r_p} r\right) |\cos(\mathbf{q})|. \quad (4)$$

總應變能則為

$$U_1 = \frac{tE}{2} \int_A (\mathbf{e}_{r1}^2 + \mathbf{e}_{q1}^2) dA = U_{r1} + U_{q1} \quad (5)$$

式(5)的單項積分結果分別為

$$\begin{aligned} U_{r1} &= \frac{Et}{2} \int_A \mathbf{e}_{r1}^2 dA \\ &= \frac{Et\mathbf{P}^2}{8} \int_0^{2p} \left(\int_0^{r_p} \frac{1}{r_p^2} \cos^2\left(\frac{\mathbf{P}}{2r_p} r\right) r dr \right) \cos^2(\mathbf{q}) d\mathbf{q} \\ &= \frac{Et\mathbf{P}^2}{8} \int_0^{2p} \left(\int_0^{r_p} \frac{1}{r_p^2} \cos^2\left(\frac{\mathbf{P}}{2r_p} r\right) r dr \right) \cos^2(\mathbf{q}) d\mathbf{q} \\ &= \frac{Et\mathbf{P}^2}{8} \int_0^{2p} \frac{1}{r_p^2} \frac{r_p^2(\mathbf{P}^2 - 4)}{4\mathbf{P}^2} \cos^2(\mathbf{q}) d\mathbf{q} \\ &= \frac{Et(\mathbf{P}^2 - 4)}{32} \int_0^{2p} \cos^2(\mathbf{q}) d\mathbf{q} \\ &= \frac{Et\mathbf{P}(\mathbf{P}^2 - 4)}{32} \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned}
U_{q1} &= \frac{Et}{2} \int_A \mathbf{e}_{q1}^2 dA \\
&= \frac{Et}{2} \int_0^{2p} \left(\int_0^{r_p} \frac{1}{r^2} \sin^2\left(\frac{\mathbf{p}}{2r_p} r\right) r dr \right) \cos^2(\mathbf{q}) d\mathbf{q} \\
&= \frac{Et}{2} \int_0^{2p} \left(\int_0^{r_p} \frac{1}{r} \sin^2\left(\frac{\mathbf{p}}{2r_p} r\right) dr \right) \cos^2(\mathbf{q}) d\mathbf{q} \\
&= \frac{Et\mathbf{I}}{2} \int_0^{2p} \cos^2(\mathbf{q}) d\mathbf{q} \\
&= \frac{Et\mathbf{p}\mathbf{I}}{2}
\end{aligned} \tag{7}$$

其中

$$\mathbf{I} = \int_0^{r_p} \frac{1}{r} \sin^2\left(\frac{\mathbf{p}}{2r_p} r\right) dr \approx 0.824 \tag{8}$$

故總位能為

$$U_1 = U_{r1} + U_{q1} = \frac{Et\mathbf{p}}{2} \left(\frac{\mathbf{p}^2 - 4}{16} + \mathbf{I} \right) \approx 0.6Et\mathbf{p} \tag{9}$$

另一方面，(徑向)總動能為

$$\begin{aligned}
T_1 &= \frac{\mathbf{r}}{2} \int_A u_1^2 dA \\
&= \frac{\mathbf{r}}{2} \int_0^{2p} \left(\int_0^{r_p} \sin^2\left(\frac{\mathbf{p}}{2r_p} r\right) r dr \right) \cos^2(\mathbf{q}) d\mathbf{q} \\
&= \frac{\mathbf{r}}{2} \int_0^{2p} \left(\int_0^{r_p} \sin^2\left(\frac{\mathbf{p}}{2r_p} r\right) r dr \right) \cos^2(\mathbf{q}) d\mathbf{q} \\
&= \frac{\mathbf{r}}{2} \int_0^{2p} \frac{r_p^2 (\mathbf{p}^2 + 4)}{4\mathbf{p}^2} \cos^2(\mathbf{q}) d\mathbf{q} \\
&= \frac{\mathbf{r}(\mathbf{p}^2 + 4)}{8\mathbf{p}^2} \int_0^{2p} r_p^2 \cos^2(\mathbf{q}) d\mathbf{q} \\
&= \frac{\mathbf{r}(\mathbf{p}^2 + 4)a^2 b^2}{16\mathbf{p}^2} \int_0^{2p} \frac{1 + \cos(2\mathbf{q})}{b^2 \cos^2(\mathbf{q}) + a^2 \sin^2(\mathbf{q})} d\mathbf{q} \\
&= \frac{\mathbf{r}(\mathbf{p}^2 + 4)a^2 b^2}{16\mathbf{p}^2} \left(\frac{2\mathbf{p}}{ab} + \frac{2\mathbf{p}(a-b)}{ab(a+b)} \right) \\
&= \frac{\mathbf{r}(\mathbf{p}^2 + 4)a^2 b}{4\mathbf{p}(a+b)}
\end{aligned} \tag{10}$$

根據 Rayleigh's quotient，模組一的自然頻率(單位：Hz)為

$$f_1 = \frac{1}{2\mathbf{p}} \sqrt{\frac{U_1}{T_1}} = \frac{1}{2\mathbf{p}} \sqrt{\frac{0.6E\mathbf{p}}{\mathbf{r}(\mathbf{p}^2 + 4)a^2b}} = 0.207 \sqrt{\frac{E(a+b)}{\mathbf{r}a^2b}} \quad (11)$$

同理，模組三的正交應變與能量可以定義為

$$\mathbf{e}_{r_2} = \frac{du_2}{dr} = \frac{\mathbf{p}}{2r_p} \cos\left(\frac{\mathbf{p}}{2r_p}r\right) |\sin(\mathbf{q})| \quad (12)$$

$$\mathbf{e}_{q_2} = \frac{u_2}{r} = \frac{1}{r} \sin\left(\frac{\mathbf{p}}{2r_p}r\right) |\sin(\mathbf{q})| \quad (13)$$

$$U_2 = \frac{Et}{2} \int_A (\mathbf{e}_{r_2}^2 + \mathbf{e}_{q_2}^2) dA = U_{r_2} + U_{q_2} \quad (14)$$

$$T_2 = \frac{\mathbf{r}}{2} \int_A u_2^2 dA \quad (15)$$

依照前述的推導方法可以得到模組三的自然頻率為

$$f_2 = \frac{1}{2\mathbf{p}} \sqrt{\frac{U_2}{T_2}} = 0.207 \sqrt{\frac{E(a+b)}{\mathbf{r}ab^2}} \quad (16)$$

由於兩個模組的振形函數極相似，因此式(11)與(16)也有類似的表示式，亦即將長短軸 a 與 b 互調就可以得到另一個公式。式(11)說明模組一的頻率受到長軸的影響遠大於短軸；模組三的頻率受到長短軸的影響則相反。

前述二個公式已經成功地將自然頻率與彈性模數 E 、密度 \tilde{n} 、以及長短軸長度 a 與 b 連結在一起。接著就必須考慮某種組合可以將 a 與 b 從該二式中抵消以簡化公式。一個可能的方法就是利用頻率的乘積，以及 $(a+b) \approx 2\sqrt{ab}$ (因為 $a \approx b$)、面積 $A \approx ab$ 、以及質量 $M = A\tilde{n}$ 的關係式。經過整理之後得到

$$f_1 f_2 = 0.207^2 \sqrt{\frac{E^2(a+b)^2}{\mathbf{r}^2 a^3 b^3}} \approx 0.27 \frac{E}{A\mathbf{r}} = 0.27 \frac{E}{M} \quad (17)$$

最後得到彈性模組的估算公式為

$$E = 3.707 M f_1 f_2 \quad (18)$$

式(18)僅包含(單位厚度之)質量與二個頻率等參數而已，非常利於實驗。這個估算公式將於下節中以 FE 模型驗證其適用性。

三、有限元素模型的建立

本研究採用 ANSYS 進行有限元素模型的建模、解題、以及振形的繪圖。單位為 MKS 制，並採用 6 個節點的三角元素進行全模型的網格化。自由度大約在 4000 左右，已達合理收斂範圍。彈性模數 $E=10\text{MPa}(=10^7\text{Nm}^{-2})$ 、波以松比 $\nu=0$ 、密度 $\bar{n}=1000\text{kg/m}^3$ 。短軸 b 固定為 0.1m，長軸 a 則由 0.1m 變化至 0.2m，間格為 0.01m，這樣軸長比 r 即介於 1.0 至 2.0。由於 r 若超過此比例，該橢圓的部分動態特性將接近樑或桿，已失去實用的價值，因此不予討論。解題器使用次空間法(subspace method)，僅解出前 20 個模組，可以節省計算時間且得到精確的頻率與振形。

四、結果與討論

將 FE 所計算的頻率與式(11)及(16)的預測結果並列於表一。可以看出模組三的頻率 f_2 相當接近，模組一的頻率 f_1 則有一段差距。這是因為模組一的振形變化相當大，因此組成振形的原始形狀函數權重變化也很大。本研究僅尋求概略的解，目的在於找出適合的頻率組合公式，因此採用的振形函數並未隨軸長比而改變，誤差自然難免。事實上，另一個重要的誤差來源是本研究並未考慮切線方向的位移以及剪應變等，故動位能的計算亦有偏差。若將 FE 計算的頻率當成模態實驗所得的結果，代入式(18)後得到的 MOE 列在表一的最右欄。與正確值 10MPa 比較，式(18)雖然低估 MOE，但相當接近而且變化相當小，僅約 1.4%而已，顯示式(18)若經過校正後應可以得到相當精準的預測結果。依表一最右欄數據校正後的彈性模數預測公式為

$$E = 4.163Mf_1f_2 \quad (19)$$

若進一步分別以式(11)的模組一頻率、式(16)的模組三頻率、式(19)的混合頻率估

算彈性模數，我們得到表二的數據。由表二可以看出，使用模組一頻率的式(11)預測值變化約 15%、使用模組三頻率的式(16)預測值變化約 7%，但式(19)僅 1.4%而已，表示式(19)的穩定性遠優於使用單一頻率的預測方式。

接著測試式(19)是否適用於其他的波以松比。將波以松比 ν 改為 0.3，並重新模擬一遍，我們得到新的二組頻率以及三種彈性模數的預測結果，如表三所列。式(19)的預測結果列於最右欄，可以看出誤差約在 3.5%以內，仍舊相當準確，也再一次很明顯地優於式(11)與式(16)，證實式(19)的確適用於非零波以松比的情況。至此我們可以肯定式(19)的正確性。

五、 語

本研究成功地提出適用於估算二維橢圓板彈性模數的預測公式。方法是先推導出二個很容易以模態實驗分辨的共面彎曲模組之自然頻率表示式，再組合成一個僅包含(單位厚度之)質量與二個頻率乘積的簡單公式，最後再以有限元素的電腦模型測試與校正，得到可適用於不同波以松比與軸長比的彈性模數預測公式。當應用於圓板時，也可以使用同一頻率與公式 $E = \alpha M f^2$ ，其中係數 α 可以依第四節的方法換算出來。事實上，如前文所述，估算圓的彈性模數要比橢圓簡單。總之，本研究之方法乃基於簡化的理論模型與推導過程，並結合了電腦模擬的快速驗證等優勢，順利將應用範圍由圓擴展至更廣義的橢圓。

以本研究所得到的成果為基礎，吾人亦循此模式將之擴充至預測三維橢圓球體的彈性模數，並獲致令人滿意的成果[10]。

六、 致謝

本研究承蒙國科會計畫 NSC-90-2313-B-197-006 經費補助，謹此致謝。

七、參考文獻

1. Timenshenko, S.P, D.H. Young, and W. Weaver, Jr. (1974), *Vibration Problems in Engineering*, 4th ed., John Wiley & Sons, Inc., pp. 476-481.
2. Den Hartog, J.P. (1985), *Mechanical Vibrations*, Dover Publications, Inc., New York, pp. 165.
3. Cooke. J.R., and R.H. Rand (1973), “A Mathematical Study of Resonance in Intact Fruits and Vegetables Using a 3-Media Elastic Sphere Model”, *Journal of Agricultural Engineering Research*, Vol. 18, No. 2, pp. 141-157.
4. 程安邦(1999), 「有限元素法應用於橢圓球體之研究」, 宜蘭技術學報, 第二期, 第 1-10 頁。
5. Wang, G., and N.M. Wereley (2002), “Free In-Plane Vibration of Rectangular Plates”, *AIAA Journal*, Vol. 40, No. 5, pp. 953-959.
6. Baker, W.E. (1961), “Axisymmetric Modes of Vibration of Thin Spherical Shell”, *J. Acoust. Soc. Am.*, Vol. 33, No. 12, pp. 1749-1758.
7. 黃禮棟、陳必超(1994), ”A Study on the Vibration of an Elastic Sphere”, *中華農業研究*, 第 43 卷, 第 4 期, 第 439-452 頁。
8. ANSYS 6.1 (2002), SAS IP, Inc., Canonsburg, PA.
9. Cherng, A.P. (2000), “Vibration Modes of Melons of Ellipsoidal Shape”, *Trans. of the ASAE*, Vol. 43, No. 5, pp.1185-1193.
10. Cherng, A.P., and F. Ouyang (2002), “A Firmness Index for Fruits of Ellipsoidal Shape”, 投稿中。

表一 波以松比 $\nu=0$ 所得到的自然頻率與預測的彈性模數 E 。

$r(=a/b)$	$f_1^\#, Hz$	f_1^*, Hz	$f_2^\#, Hz$	f_2^{**}, Hz	$E^{###} (MPa)$
1.0	263.0	292.7	293.0	292.7	8.97
1.1	248.3	272.7	281.9	286.0	8.97
1.2	232.8	55.86	275.2	280.3	8.95
1.3	218.1	241.5	270.6	275.3	8.94
1.4	204.7	229.1	267.2	271.0	8.92
1.5	192.5	218.2	264.6	267.2	8.90
1.6	181.6	208.6	262.6	263.9	8.89
1.7	171.7	200.1	261.0	260.9	8.87
1.8	162.8	192.4	259.6	258.2	8.86
1.9	154.7	185.5	258.5	255.7	8.85
2.0	147.4	179.3	257.6	253.5	8.84

FE 計算結果 * 式(11) ** 式(16) ### 式(18)

表二 波以松比 $\nu=0$ 所預測的彈性模數 $E(MPa)$ 。

$r(=a/b)$	式(11)	式(16)	式(19)
1.0	8.071	10.018	10.078
1.1	8.291	9.715	10.070
1.2	8.279	9.641	10.055
1.3	8.157	9.659	10.034
1.4	7.986	9.720	10.015
1.5	7.783	9.804	9.992
1.6	7.578	9.904	9.979
1.7	7.364	10.010	9.964
1.8	7.157	10.111	9.949
1.9	6.953	10.217	9.937
2.0	6.761	10.324	9.932

表三 波以松比 $\nu=0.3$ 所得到的自然頻率與預測的彈性模數 E 。

$r(=a/b)$	f_1, Hz	f_2, Hz	$E(\text{MPa})$		
			式(11)	式(16)	式(19)
1.0	231.5	341.8	6.254	13.632	10.349
1.1	220.2	326.4	6.520	13.024	10.340
1.2	209.4	313.8	6.698	12.535	10.313
1.3	199.2	303.6	6.805	12.158	10.282
1.4	189.4	295.4	6.837	11.879	10.244
1.5	180.2	288.9	6.820	11.687	10.213
1.6	171.6	283.6	6.766	11.551	10.184
1.7	163.5	279.2	6.678	11.454	10.149
1.8	156.0	275.5	6.572	11.387	10.118
1.9	149.0	272.3	6.450	11.337	10.082
2.0	142.6	269.3	6.328	11.283	10.045

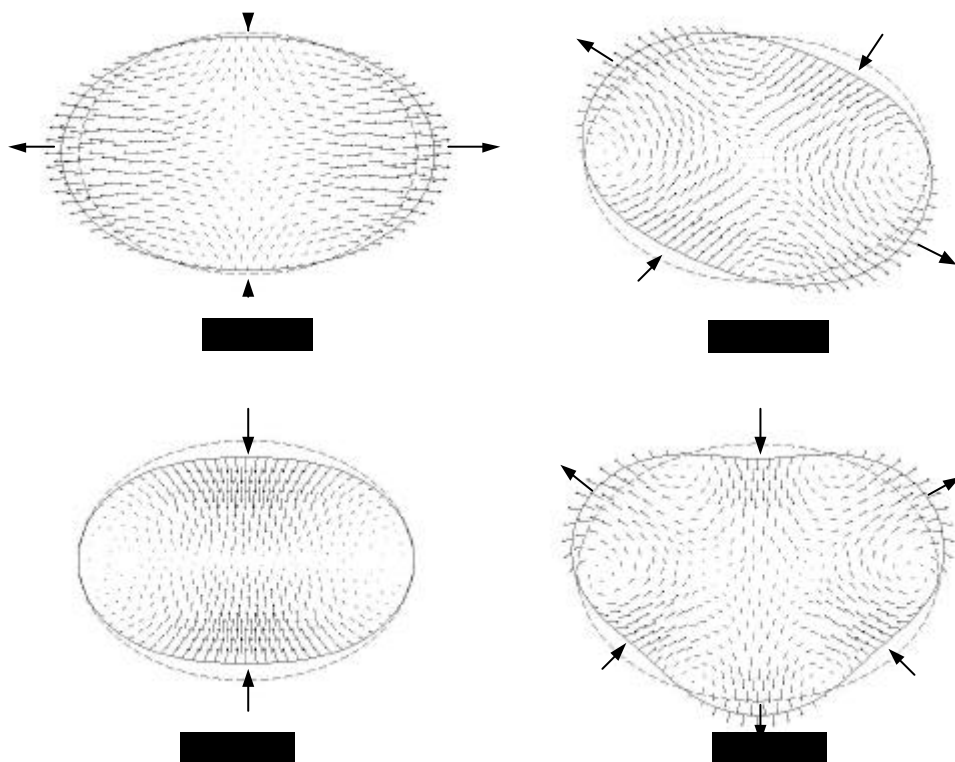


圖 1 橢圓的四個基本彎曲模組振形向量圖，軸長比 $r=1.4$ 。

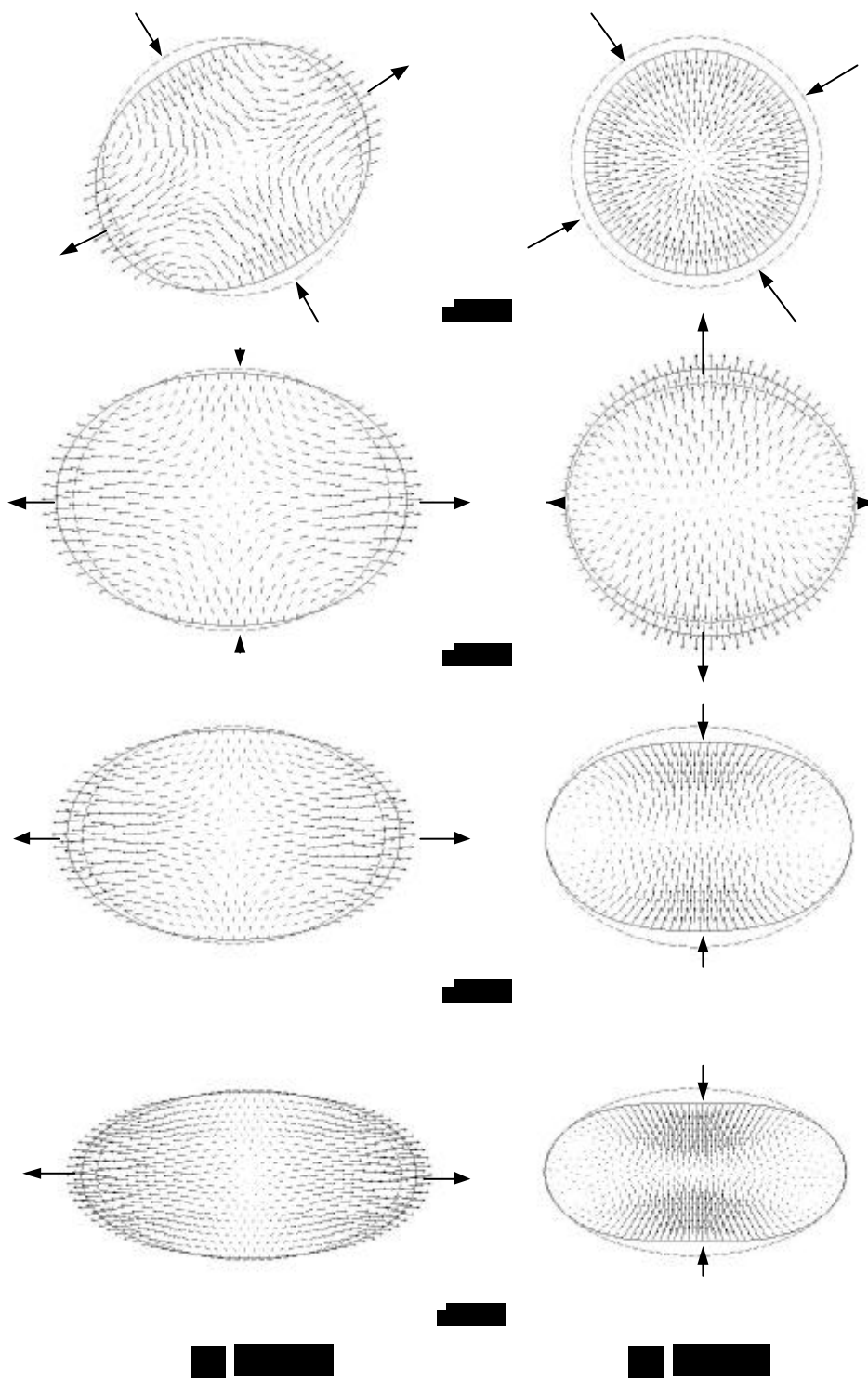


圖 2 模組一與模組三隨軸長比 r 的演變情形。

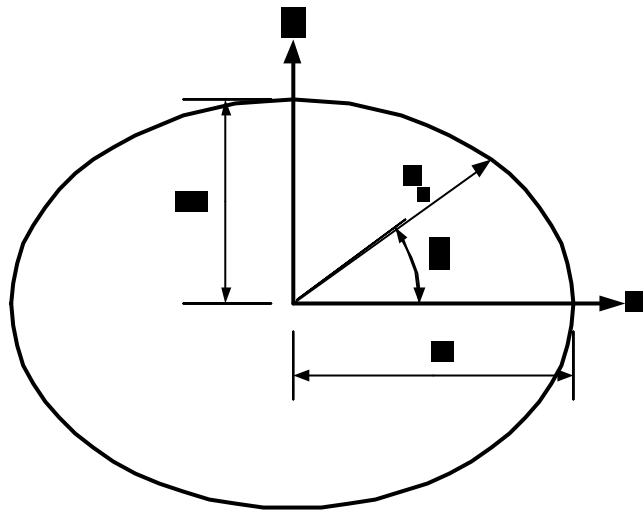


圖 3 橢圓的座標系與各項尺寸符號。