

方形彎管內二次流現象之數值模擬

歐陽慧濤¹ 喻新² 羅元宏³ 盧志晃³

1. 國立宜蘭大學土木工程學系助理教授
2. 國立宜蘭大學土木工程學系教授
3. 國立宜蘭大學土木工程學系研究生

摘 要

在水利工程中，各類型的數值模式已經被廣泛地開發並應用於各種天然或人工渠道中。一般而言，因為水利工程處理的問題常為大尺度的工程問題，且因以往受限於電子計算機有限資源及計算速度的考量下，數值模式常用一維或二維的理論加以簡化，以求在合理的時間內得到較為整體而平均的資料。但對於複雜的流況，如彎管中的二次流現象，簡化後的數值模式則無法精確地模擬。然而，今日電子計算機的快速發展，複雜的三維水理計算已可在合理的時間內完成。本研究初步以簡單的層流模式配合定蓋水面簡化處理一 90° 彎道，即簡化成方管的情況進行模擬，並觀察其流場變化。

關鍵詞：方形彎管、三維水理、二次流

Numerical Simulation of Secondary Current in a Bend Square Conduit

Ouyang, H.¹, Yu, H.², Lu, C.³, and Luo, Y.³

1. Assistant Professor Department of Civil Engineering, National Ilan University
2. Professor Department of Civil Engineering, National Ilan University
3. Graduate research assistant Department of Civil Engineering, National Ilan University

Abstract

In hydraulic engineering, various numerical models have been developed and applied to a variety of problems in natural and manmade open-channel flows. In the past, because of the large scale of the problems in hydraulic engineering and the limitation on computer resources, numerical models used in hydraulic engineering are, in general, simplified by using 1D or 2D theory. These simplified models can provide rather gross and average flow features in a reasonable time. However, for complex flows, such as the secondary current in bend flows, 1D or 2D models cannot provide satisfied simulations. However, due to the fast development in computer technology, it is possible today to accomplish a 3D simulation with complex boundary condition in a reasonable time. The development of 3D numerical models also provides a new approach for studying bend flows. As a first step, the study utilizing a numerical model to simulate the 3D flow field in a 90° squarer conduit. The phenomenon of secondary current is observed and studied.

Keyword: square conduit, 3D flow field, secondary current

一、前言

河川彎道中的二次流現象常導致河岸的沖刷與崩塌，造成河川治理上極大的困擾，因此，對彎道二次流的深入了解與認識，是河川治理與水工設計時的重要依據。已往河川流場的數值模擬，因受到計算設備與資源的限制，大多以簡化的一維或二維模式進行。然而，因彎道中複雜的水理現象，簡化模式通常難以模擬二次流現象。近年來，由於計算機的快速發展與數值方法的不斷改良，陸續有研究者以完全三維的數值模式進行彎道水理的模擬，並獲得良好成果。

本研究以三維的數值模式進行彎道水理的模擬，初步僅以簡單的層流模式配合定蓋水面簡化處理，即簡化成 90° 方管的情況。

二、文獻回顧

早期的數值模式大多以求解一維的 De Saint Venant 方程式為主要依據。雖然此方程式的理論推導在二十世紀前葉即已建立，然而實際應用在天然河川的計算上卻遲至電子計算機的出現之後。Isaacson 等(1954)首先將 De Saint Venant 方程式應用在 Ohio 與 Mississippi 河的水理計算上。之後，河川數值模式的發展仍十分緩慢，直到 70 至 80 年代間，才有大量的一維模式發展成熟並廣泛地應用在河川網路與大尺度的水理計算問題。今日，一維模式仍是許多商用軟體的基礎架構。

相對於一維模式將控制方程式對整個斷面取平均值，二維模式則是將動量與質量方程式對河川寬度或深度方向取平均值。寬度平均模式已經被成功地應用在底床變化不大的河川中(Hauser 等,1985; Celik 與 Rodi, 1989; Wenka 等, 1991; Berthwicle 與 Barber, 1992)。

深度平均模式忽略水深方向的流場變化，因此在某些沉況時，無法獲得重要的流動特性。然而，此種模式仍在明渠水理計算中佔有重要的地位，並且廣泛應用在各種河川模擬中，如 Benque, S.P., 1982; Tingsanchali and Rodi, 1986; Celik and Rodi, 1989; Bravo and Holly, 1996 等。一般而言，二維模式理論基礎完整且易於使用，然而因其忽略水深方向的變化，使得當底床在側向變化較大的河段或蜿蜒渠道的情況時，易產生較大的誤差。

近年來，漸有研究者開始採用完全三維的數值模式進行河川流場的模擬。Lane 等(1999) 比較了三維模式與二維模式的優缺點，其結論指出二維模式因其深度平均的限制，無法模擬二次流的流場結構。三維模式在底床剪力及其它重要流場結構的模擬則可提供較可靠的資訊。

本研究以數值模式求解三維 Navier-Stokes 方程式並進行實例計算後，與實驗資料加以比較，以探討其模擬的精確度。在數值方法上，本研究以有限體積法(Finite Volume Method, FVM) 將控制方程式進行離散，並以

SIMPLE 算則疊代求解流速與壓力場，以獲得一較準確之計算結果。

三、控制方程式

(一) 基本方程式

考慮非紊流情況下之三維穩態連續方程式與動量方程式如下：

連續方程式：

$$J \frac{\partial}{\partial \xi^i} (J^{-1} U^i) = 0 \quad (1)$$

動量方程式 (i = 1, 2, 3,)：

$$J \frac{\partial}{\partial \xi^i} \left[J^{-1} U^m U_i - \frac{1}{Re} J^{-1} g^{mn} \frac{\partial U_i}{\partial \xi^n} + J^{-1} \frac{\partial \xi^m}{\partial x_i} P \right] = 0 \quad (2)$$

式中 x_i 為卡氏座標系統， U_i 為 Contravariant 速度分量， ξ^i 為曲線座標系統， P 為壓力， Re 為雷諾數， J 為座標轉換之 Jacobian， g_{ij} 為 Contravariant metric 張量，分別定義如下：

$$J = \frac{\partial(\xi^1, \xi^2, \xi^3)}{\partial(x_1, x_2, x_3)} = \det \begin{bmatrix} \xi_{x_1}^1 & \xi_{x_2}^1 & \xi_{x_3}^1 \\ \xi_{x_1}^2 & \xi_{x_2}^2 & \xi_{x_3}^2 \\ \xi_{x_1}^3 & \xi_{x_2}^3 & \xi_{x_3}^3 \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$g^{ij} = \xi_{x_k}^i \xi_{x_k}^j \quad (4)$$

(二) 邊界條件

1. 固定牆面

在固定牆面處沒有流體通量通過，即沿邊界線方向之速度等於零。且沿邊界切線方向須滿足不可滑移邊界條件(No-Slip Condition),即

$$\phi|_{wall} = 0 \quad (5)$$

2. 入口條件

入口處之流速必須給定，一般而言入口條件，可分為下列三種

- a. 均勻入流。
- b. 實驗資料或現場量測資料。
- c. 完全發展之流速分佈。

本研究採用第三種入流條件，其完全發展之流速分佈則以一長段之直渠道先行進行流場計算而求得。

3. 出口條件

在出口處，流場不再變化，即

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = 0 \quad (6)$$

同時，壓力必須給定，本研究將出口處之壓力值設定為零。

四、數值方法

(一) 有限體積法

本研究採用有限體積法(Finite Volume Method)配合非交錯網格(Colocated grid)將 Navier-Stokes 方程式加以離散。非交錯網格因將速度與壓力等變數同時儲存在網格中心點，因此具有記憶容量小，且程式容易撰寫等優點，然而，在不可壓縮流場的計算時，因會出現棋盤式壓力分佈(Checker-board Pressure Distribution)而在早期的計算流體發展過程中備受質疑。但是，近年來陸續有研究者提出較好的演算法解決此問題，因此而逐漸成為計算流體中的主流。

有限體積法乃是將每一格點視為一個控制體積，並將質量與動量方程式對格點做體積分後，應用 Gauss 定理將體積分轉換為面積分，如下式：

$$J \iint_{s} n_m \left(J^{-1} U^m \Phi - \frac{1}{R_e} J^{-1} g^{mm} \frac{\partial \Phi}{\partial \xi^n} \right) dA = \iiint_v S dv \quad (7)$$

其 Φ 代表 U_1, U_2, U_3 ，而 S 則為源項。

上式經由適當的差分展開後，可形成一組線性聯立方程組。

$$a_p \Phi_p + \sum a_l \Phi_l = S \quad (8)$$

其中 l 為其它相鄰格點之值。

(二) SIMPLE 算則

上式之解在滿足所提供之壓力場的情況下可符合動量方程式。然而，在一般情況下，壓力場也屬未知，而須給一起始值，因此，上式之解雖可滿足動量方程式，卻無法滿足質量方程式。

SIMPLE 算則是由 Patankar 與 Spalding (1972) 所提出，此方法將流速與壓力的計算分為預測與修正兩步驟進行。預測值即為(8)式之解，修正值則藉由下式將壓力場的修正量與速度場的修正量連結：

$$U'_i = - \frac{1}{a_p^{u_i}} \frac{\partial p'}{\partial \xi^m} \frac{\partial \xi^m}{\partial x_i} \quad (9)$$

式中 U'_i 為速度之修正量， p' 則為壓力之修正量，並利用速度修正量在格點表面的質量通率與速度預測值的質量通率大小相同的事實，可得下列線性聯立方程組：

$$A_p P'_p + \sum A_l P'_l = - \sum \dot{M}^* \quad (10)$$

式中 $\sum \dot{M}^*$ 為速度預測值在格點各表面的質量通率

總合，將上式解出後，則可以下式修正壓力場：

$$P = P^* + \alpha P' \quad (11)$$

式中 α 為鬆弛因子，Patankar (1980) 建議使用 0.8。

而速度修正量則可由(9)式獲得。如此反覆疊代直到滿足收斂條件為止。

五、計算實例

(一) 二維方形穴流

方形穴流為在一方形之容器的頂部，以一固定速度擾動容器內部所形成之流場。因其幾何外形簡單易於模

擬的特性，常做為計算流體研究分析的實例。

方形穴流的流場示意圖及邊界條件如圖 1 所示，圖 2 為 $Re=100$ 時之速度分佈圖，圖 3 則為流線分佈圖，圖中可明顯看到一環流的形成。

圖 4 為在 $x=0.25, 0.50$ 及 0.75 處之 x 方向速度剖面，圖中可明顯觀察到當 y 小於約 0.8 時，三剖面的速度均為負值，顯示方孔下半部的流向與上半部的流向相反。圖 5 為 $x=0.25, 0.50, 0.75$ 三剖面處之 y 方向速度分佈，圖中顯示在 $x=0.25$ 與 0.50 處之 y 方向速度皆為正值，而在 $x=0.75$ 時則變為負值，顯示流場在後半部為向上流動，而在超過 $x=0.50$ 之後才改為向下流動。

(二) 90° 彎曲方管

Humphrey 等(1977)針對一 90°彎曲之方形管內的流場進行量測，並發現在彎曲處由於二次流的出現，導致最大速度的發生點往外側移動。其後陸續有研究者以數值模式針對此問題進行探討(Rogers 等,1996;Yen 等,1991; Rosenfeld 等,1991; Sotiropoulos 與 Patel,1992; Lai;1999)。然而，大多數的模擬結果皆出現相同的誤差，尤其在 60° 與 90°彎曲處，此誤差的成因尚未十分明瞭。Belaid 等(1992)針對此問題的流場穩定性進行探討，並發現此流場在接近內壁處並非穩態，此現象一般認為可能是穩態數值解無法得到滿意結果的原因。

由於現象的複雜性，本研究仍以穩態解作為研究此問題的第一步。圖 6 為 90°方管之示意圖，由於現場實驗的上游入流條件為完全發展流，因此，本研究於入口處前方加上一長直渠道，使流場在彎管入口處達到完全發展。

同時，由於此問題為上下對稱，因此，此研究只計算下半部方管以節省計算時間。圖 7 為在管道彎曲 0°,30°,60°,90°於 $z/h = 0.5$ 處之速度剖面分佈，圖中顯示隨著彎曲角度的增大，最大流速的發生點逐漸朝外側偏移，顯示在管道彎曲處有二次流的形成，而速度剖面則受到此二次流的影響而產生外偏的現象。圖 8 則為在 $z/h = 0.25$ 處之速度剖面分佈，圖中同樣可觀察到流速剖面的偏移現象。圖中同時顯示在 60°與 90°彎曲處，速度剖面在靠近內側管壁處另有一較小之速度高峰出現，在 Humphrey 的實驗中，雖有第二高峰的出現，但並非十分明顯。然而，在前人的數值模擬中皆可觀察到此誤差的存在。如 Belaidi 所建議，可得到更滿意的結果。

圖 9~圖 11 分別為 30°, 60°及 90°處之速度分佈，圖中可明顯觀察到二次流的形成，圖中同時顯示二次流的渦心隨著角度的增大逐漸向內側偏移，至 90°時在靠近外壁處又有另一渦心形成，整個剖面則由內外兩個渦心共同形成一個二次流場。

六、結論

本研究以數值模式分別模擬二維方形穴流及三維

90°方管內之層流流場分佈，皆獲得滿意結果。在 90°方管的模擬中，計算結果可明顯觀察到彎管中二次流的出現。同時，速度分佈亦因二次流的影響而產生向外偏移的現象，二次流的渦心則隨著彎曲角度增大而向內側偏移。計算所得之速度剖面分佈雖與實驗結果出現若干誤差，然而，此現象應是該問題為非穩態流場所導致，進一步的模擬應以非穩態模式進行。

參考文獻

1. Belaidi, A., Johnson, M.W., and Humphrey, J.A.C. (1992), "Flow instability in a curved duct of rectangular cross-section." *ASME Journal of Fluids Engineering*, Vol.114, 585-592.
2. Benque, J.P., Cunge, J.A., Feuillet, A.H., and Holly, F.M. Jr. (1982b), "New method for tidal current computation." *Journal of Waterway, Port, Coast and Ocean Engineering*, Vol. 108(3), 397-417.
3. Borthwick, A.G.L., and Barber, R.W. (1992), "River and reservoir flow modeling using the transformed shallow water equations." *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Vol. 14, 1193-1217.
4. Bravo, H.R., and Holly, F.M. Jr., (1996), "Turbulence model for depth-averaged flows in navigation installations." *ASCE Journal of Hydraulic Engineering*, Vol. 122(12), 718-727.
5. Celik, I., and Rodi, W. (1989), "Modeling suspended sediment transport in non equilibrium situations." *ASCE Journal of Hydraulic Engineering*, Vol. 114(10), 1157-1191.
6. Hauser, J., Paap, H. G., Eppel, D., and Mueller, A.,(1985), "Solution of shallow water equations for complex flow domains via boundary fitted coordinates." *International Journal of Numerical Methods in Fluids*, Vol.5, 727-744.
7. Isaacson, E., Stoker, J.J., and Troesch, B.A.,(1954), "Numerical solution of flood prediction and river regulation problems (Ohio Mississippi floods), Report II." New York University, Inst. Math. Sci. Rept., IMM-NYU-205.
8. Lai, Y.G. (1999), "An unstructured grid arbitrarily shaped element method for fluid flow simulation." *AIAA Paper* 99-3711.
9. Lane, S. N., Bradbrook, K.F., Richards, K.S., Biron, P.A., and Anderson, A.G.,(1999), "The application of computational fluid dynamics to natural river channels: three-dimensional versus two-dimensional approaches." *Geomorphology*, Vol. 29. 1-20.
10. Patankar, S.V., and Spalding, D.B.,(1972), "A calculation procedure for heat, mass and momentum transfer in three-dimensional parabolic flow." *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 15(10), 1787-1806.
11. Rogers, S.E., Kwak, D., and Kiris, C. (1991), "Steady and unsteady solutions of the incompressible Navier-Stokes equations." *AIAA Journal*, Vol. 29, 603-610.
12. Rosenfeld, M., Kwak, D., and Vinokur, M. (1991), "A fractional step method for the unsteady incompressible Navier-Stokes Equations in generalized coordinate systems." *Journal of Computational Physics*, Vol. 94, 102-137.
13. Sotiropulos, F., and Patel, V.C.,(1990), "Prediction of turbulent flow through a transition duct using a second-moment closure." *AIAA Journal*, Vol.32, 2194-2204.
14. Tingsanchali, T., and Rodi, W.,(1986), "Depth average calculation of suspended sediment transport in rivers." *Proceedings of 3rd International Symposium on River Sedimentation*, Mississippi, 1416-1425.
15. Wenka, T., Valenta, P., and Rodi, W.,(1991), "Depth-averaged calculation of flood flow in a river with irregular geometry." *Proceedings of 24th LAHR Congress*, Madrid, A225-232.
16. Yeo, R.M., Wood, P.E., and Hrymak, A.N. (1991), "A numerical study of laminar 90 degree bend duct flow with different discretization schemes." *ASME Journal of Fluids Engineering*, Vol. 113, 536-56.

93 年 10 月 20 日投稿

93 年 12 月 22 日接受

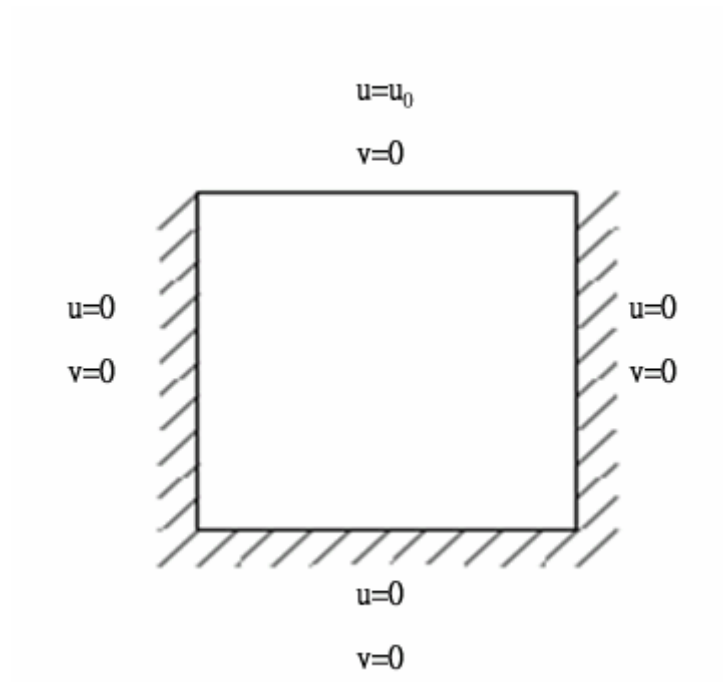


圖 1、方形穴流之示意圖及邊界條件

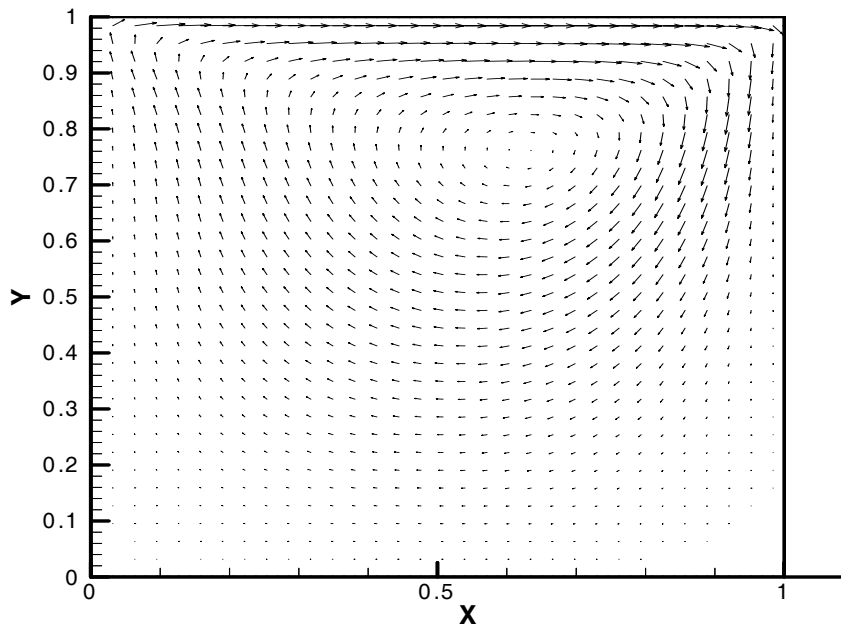


圖 2、方穴流場速度分佈圖($Re=100$)

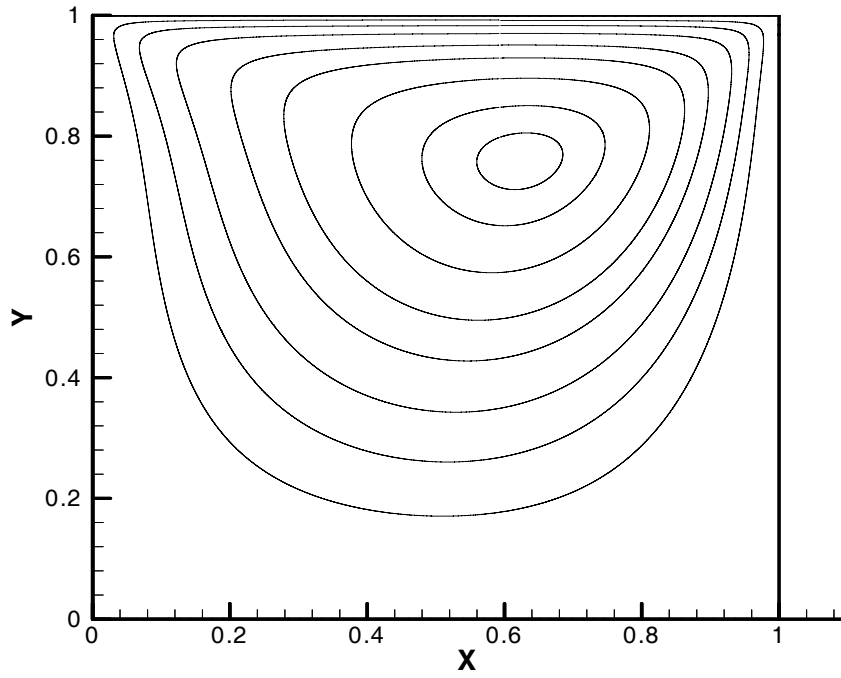


圖 3、y 方向速度剖面($Re=100$)

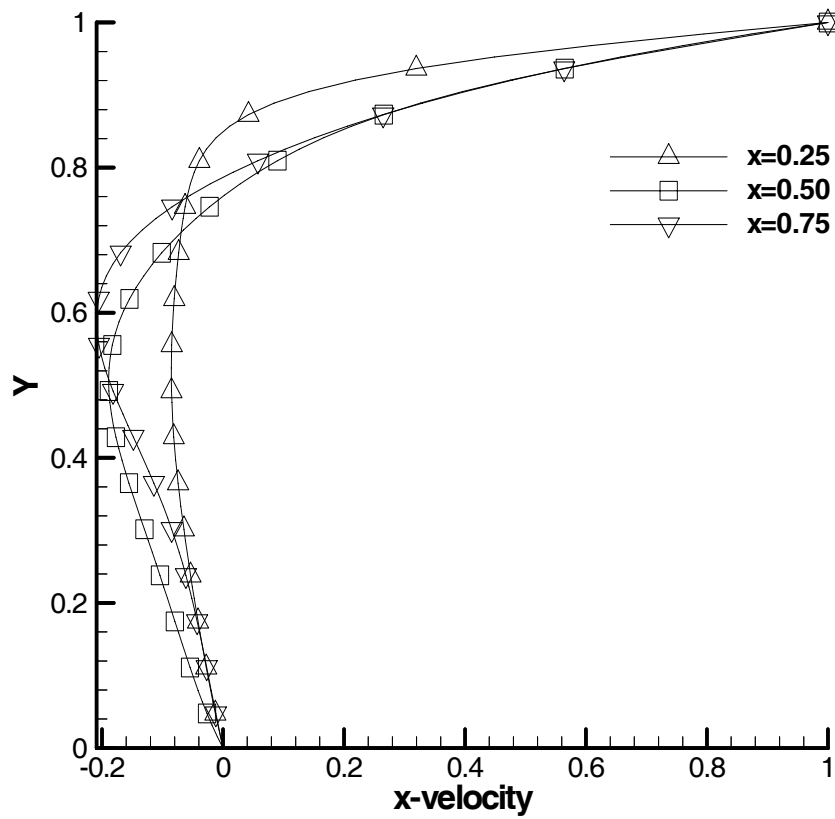


圖 4、方穴流場流線分佈圖($Re=100$)

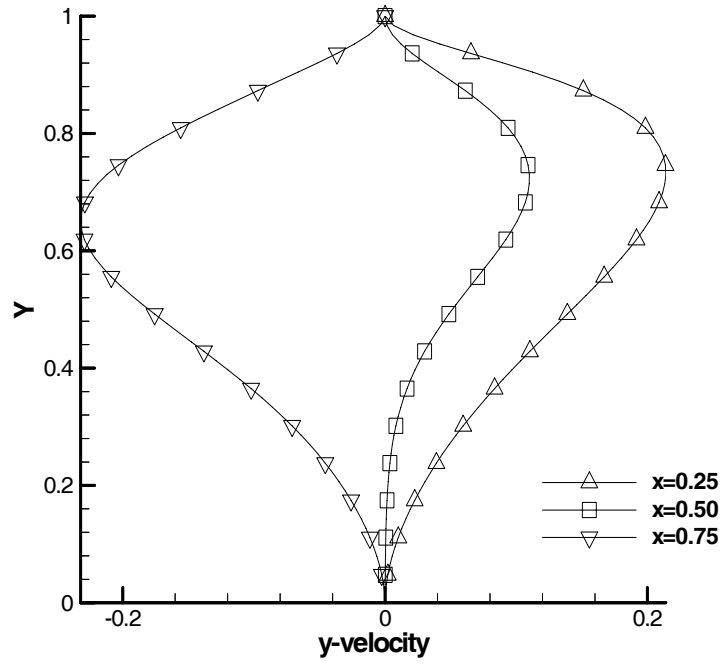


圖 5、x 方向速度剖面(Re=100)

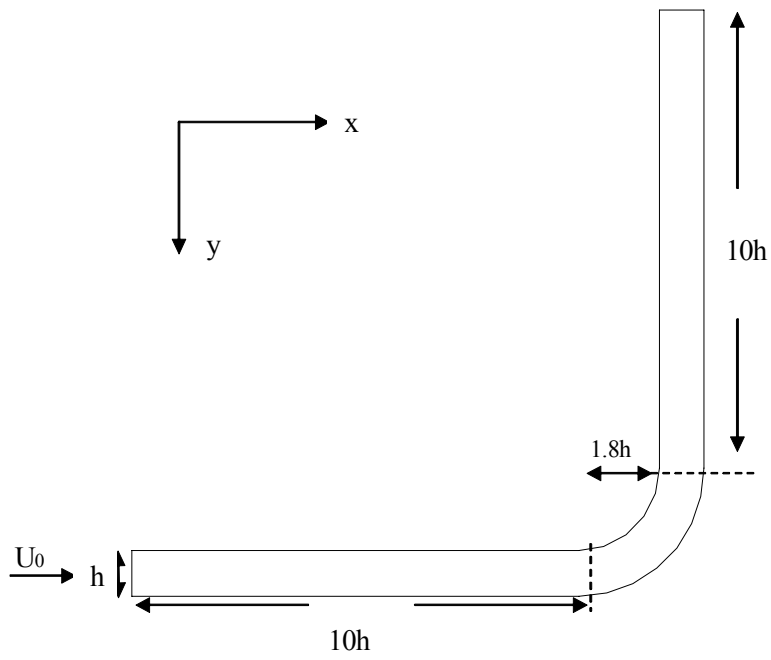


圖 6、90°方管示意圖

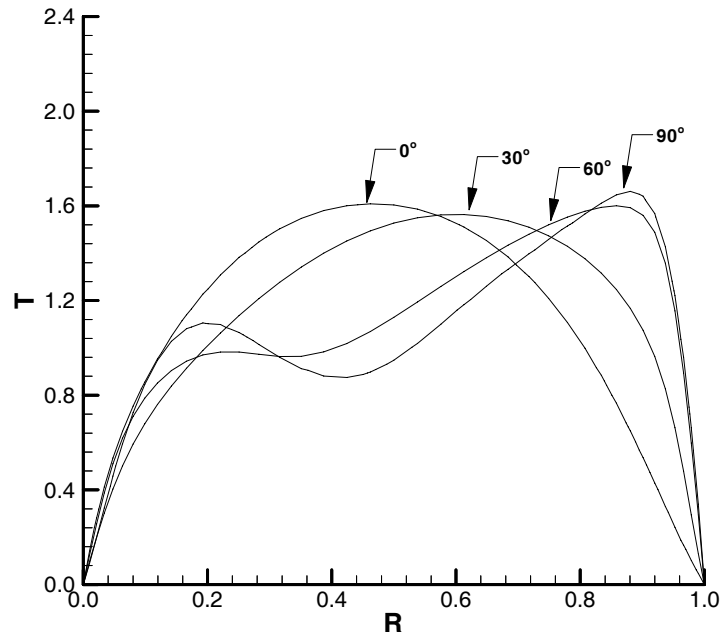


圖 7、速度剖面分佈圖($\frac{z}{h} = 0.5, R_e=790$)

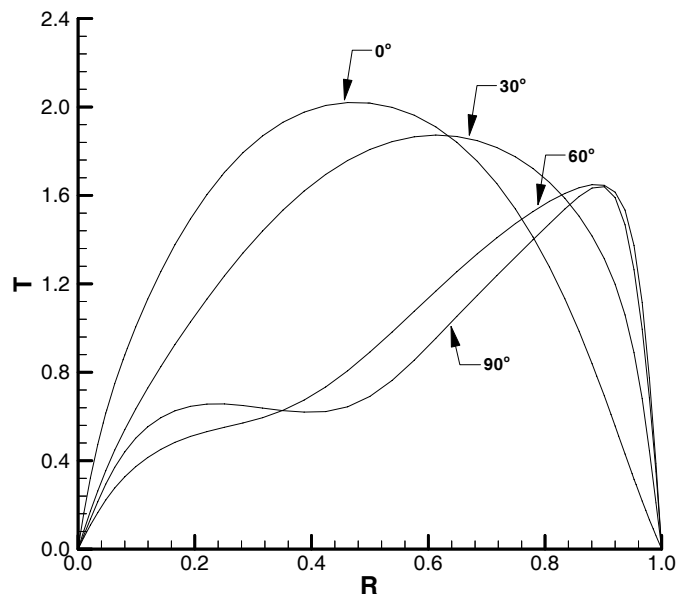


圖 8、速度剖面分佈圖($\frac{z}{h} = 0.25, R_e=790$)

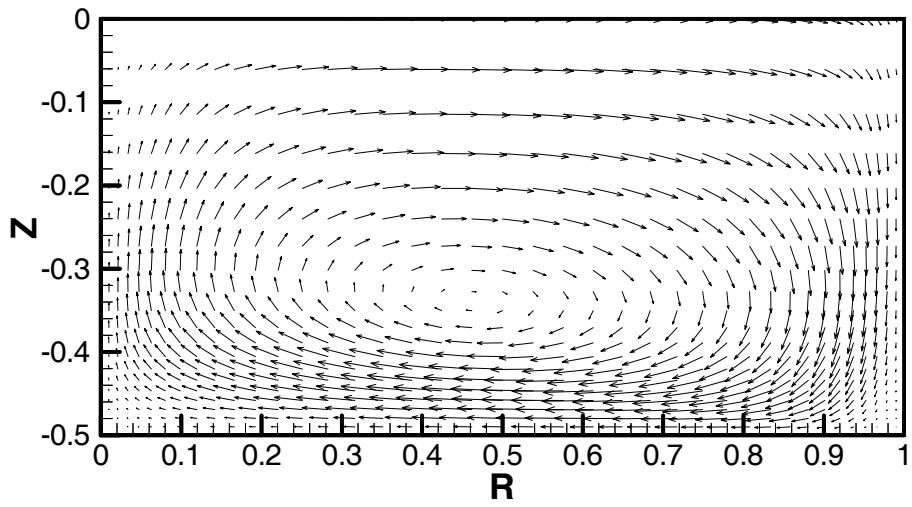


圖 9、30°彎曲處之速度分佈圖

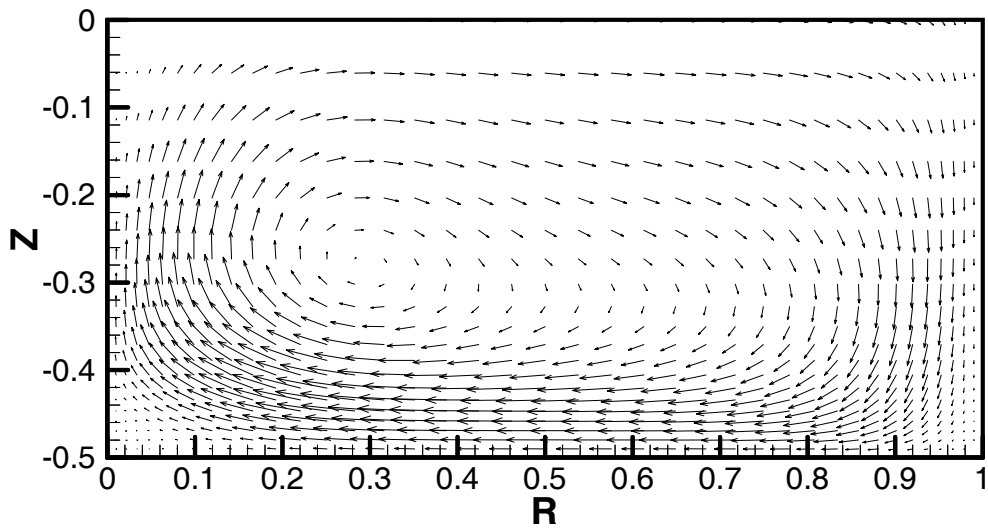


圖 10、60°彎曲處之速度分佈圖

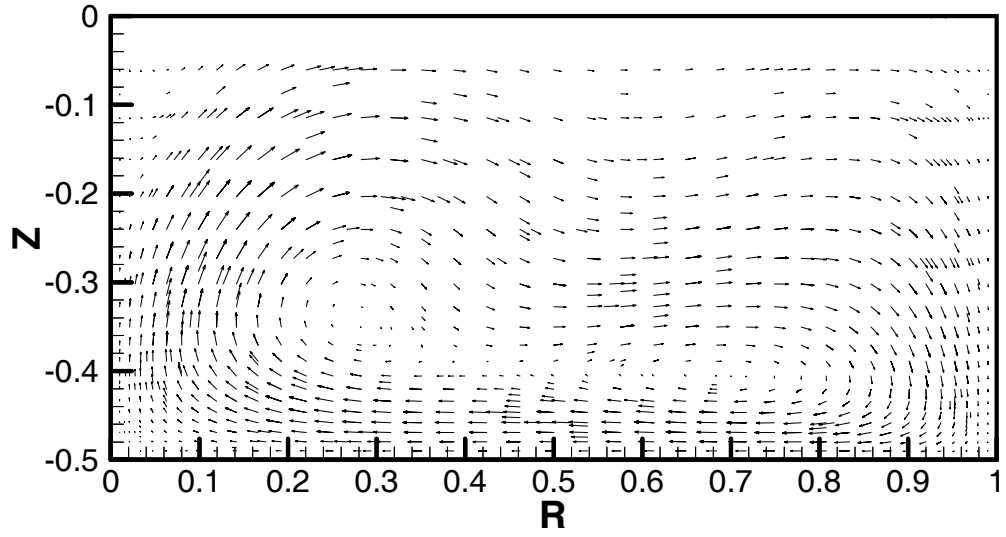


圖 11、90°彎曲處之速度分佈圖

