

第一部份、選擇題（單選題，每題 5 分，無需寫出計算過程）

- 選出初始值問題的解答： $x \frac{d^2 y}{dx^2} - 2 \frac{dy}{dx} + xy = x^2 - 2 - 2 \sin x$ ， $y(0) = 0$ ， $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=0} = 0$
(A) $y(x) = x(\sin x + 1)$ (B) $y(x) = x(\sin x - 1)$ (C) $y(x) = x^2(\sin x + 1)$
(D) $y(x) = x^2(\sin x - 1)$
- 哪一個微分方程式為正合 (exact) ? (A) $x^2 dy + 4y^3 dx = 0$
(B) $5 \sinh y dx + x \cosh y dy = 0$ (C) $y dy + x dx = 0$ (D) $x^2 e^y y' + ye^x = 0$
- 假設 $\frac{d^2 y}{dx^2} + a_1 \frac{dy}{dx} + a_2 y = 0$ 為常係數微分方程式，下列何者不可能為其解答，
(A) $e^{-x} \cos x$ (B) $x e^{-x}$ (C) $x + e^{-x}$ (D) $1 + e^{-x}$
- $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 3 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$ 的解為何？ (A) $\cos(x)\cos(t) - \sin(x)\sin(t)$
(B) $\sin(x)\cos(t) + \cos(x)\sin(t)$ (C) $\sin(x)\cos(2t) - \cos(x)\sin(2t)$
(D) $\sin(2x)\cos(t) - \cos(2x)\sin(t)$
- 聯立方程式 $\begin{cases} kx + 2y - z = 0 \\ y + 4z = 0 \\ x + 5y - 2z = 0 \end{cases}$ 有非零解，則 k 值為 (A) $\frac{4}{11}$ (B) $\frac{7}{22}$ (C) $\frac{5}{11}$ (D) $\frac{9}{22}$
- 下列何者為 Hermitian 矩陣？ (A) $\begin{bmatrix} 3+4i & -5i \\ -7 & 6-2i \end{bmatrix}$ (B) $\begin{bmatrix} 3i & 2+i \\ -2+i & -i \end{bmatrix}$ (C) $\begin{bmatrix} i & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & i \end{bmatrix}$
(D) $\begin{bmatrix} 4 & 1-3i \\ 1+3i & 7 \end{bmatrix}$
- 行列式 $\begin{vmatrix} 2 & 0 & -4 & 6 \\ 4 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 6 & -1 \\ -3 & 8 & 9 & 1 \end{vmatrix}$ 的值為 (A) 1082 (B) 0 (C) 1134 (D) 978
- 向量 $\vec{A} = \vec{x} + \vec{y} + \vec{z}$ 與向量 $\vec{B} = \vec{y} - \vec{z}$ 所構成之平面的法向量與向量 $\vec{C} = \vec{x} - 2\vec{z}$ 的夾角為
何？ (A) $\theta = \cos^{-1} \frac{1}{30}$ (B) $\theta = \cos^{-1} \frac{1}{\sqrt{30}}$ (C) $\theta = \cos^{-1} \frac{4}{\sqrt{30}}$ (D) $\theta = \cos^{-1} \frac{2}{15}$

9. 哪一組向量為 R^2 空間的 orthonormal basis ? (A) $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), (1, -1)$
(B) $\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ (C) $(1, 1), (1, -1)$ (D) $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$
10. 設 $\vec{R}(t) = 2t\vec{x} - \cos(3t)\vec{y} + t^3\vec{z}$, 求 $\vec{R}(t) = \frac{d}{dt}\vec{R}(t)$ 的單位方向向量為何 ?
(A) $\frac{2t\vec{x} + 3\sin(3t)\vec{y} + 3t^2\vec{z}}{4 + 9\sin^2(3t) + 9t^4}$ (B) $\frac{2t\vec{x} + 3\sin(3t)\vec{y} + 3t^2\vec{z}}{\sqrt{4 + 9\sin^2(3t) + 9t^4}}$ (C) $\frac{2t\vec{x} + 3\sin(3t)\vec{y} + 3t^2\vec{z}}{\sqrt{9\sin^2(3t) + 9t^4}}$
(D) $\frac{2t\vec{x} + 3\sin(3t)\vec{y} + 3t^2\vec{z}}{\sqrt{4 + 9t^4}}$

第二部份、計算題（每小題 5 分，需寫出必要之計算過程，並清楚標示最後答案）

1. A matrix $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1/2 \end{bmatrix}$, find
(i) the eigenvalues of A ,
(ii) A^{-1} ,
(iii) A^3 ,
(iv) $\lim_{n \rightarrow \infty} A^n$.
2. (i) Calculate the Laplace transform $\mathcal{L}\{t^3\}$.
(ii) Calculate the inverse Laplace transform $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+4}{s^2+4}\right\}$
(iii) Solve $y(t)$, $y(t) = te^t - 2e^t \int_0^t e^{-\tau} y(\tau) d\tau$.
3. (i) Assume $f(x) = \begin{cases} -4 & -\pi \leq x \leq 0 \\ 4 & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$ and its Fourier series $f(x) = \frac{c}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \sin((2n-1)x)$,
find the constant c .
(ii) Is the function $f(x) = \sin x + \cos x$ odd, even, or neither odd nor even?
(iii) Find the Fourier transforms of $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } a < x < b \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$.